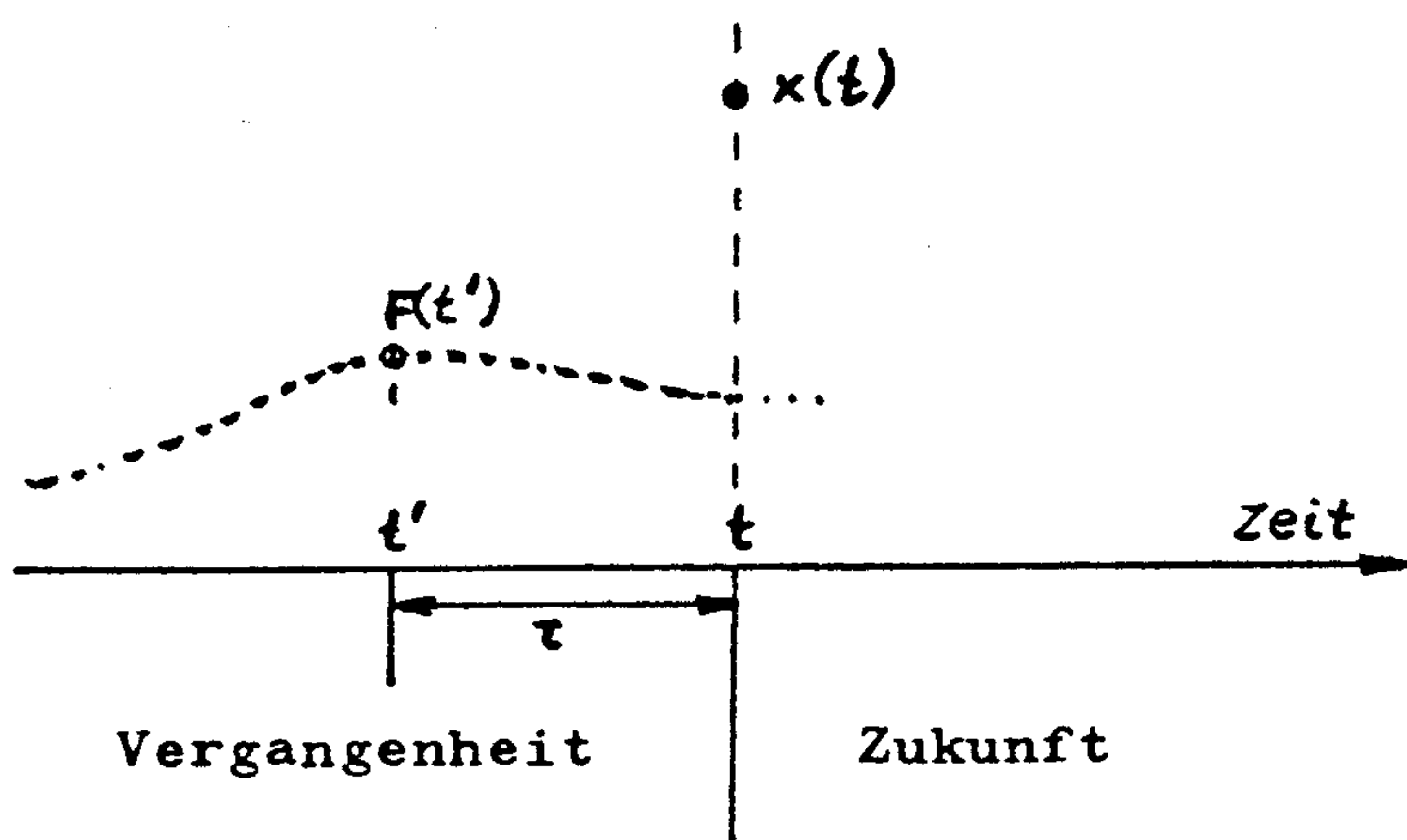


Kramers-Kronig-Beziehung

1. Anwendungsbereich

Ein "System" werde einer äußeren Einwirkung ausgesetzt, die wir verallgemeinernd "Kraft" F nennen. Sie kann irgendwie von der Zeit abhängen. Sie bewirkt eine "Reaktion" x , die ebenfalls von der Zeit abhängt. Zum Zeitpunkt t beobachtet man den Wert $x(t)$. Dieser hängt aufgrund der Kausalität, deren Gültigkeit wir voraussetzen, nur von der "Vorgeschichte" der Kraft ab, also nur von $F(t')$ mit $t' < t$ (Abb. 1), natürlich aber nicht von künftigen Krafteinwirkungen.



Für hinreichend schwache Kräfte können wir eine lineare Abhängigkeit der Reaktion $x(t)$ von den vorausgegangenen Krafteinwirkungen $F(t')$ mit $t' < t$ annehmen.

Abb. 1: Reaktion x zum Zeitpunkt t aufgrund vorausgegangener Krafteinwirkung $F(t' < t)$

Der Proportional^{itäts}koeffizient κ wird davon abhängen, wie lange der Zeitpunkt t' der Krafteinwirkung $F(t')$ zurückliegt, also

$$\kappa = \kappa(\tau), \quad \tau = t' - t \quad (1)$$

Da dann $t' = t - \tau$ gilt, können wir $F(t') = F(t - \tau)$ schreiben, wobei für $x(t)$ nur $\tau > 0$ interessiert. Allgemein erhält man für die Abhängigkeit der Reaktion $x(t)$ von $F(t - \tau)$ dann

$$x(t) = \int_0^{\infty} \kappa(\tau) \cdot F(t - \tau) \cdot d\tau \quad (2)$$

Der Realität entsprechend kann ferner vorausgesetzt werden, daß eine zeitlich konstante (endliche) Kraft F eine zeitlich konstante (endliche) Reaktion x hervorruft, so daß

$$\int_0^{\infty} \kappa(\tau) d\tau = x/F \quad (3)$$

endlich ist.

Wirken mehrere verschiedene Kräfte F_k , $k = 1, \dots, n$, so bewirkt jede für sich eine Reaktion x_k , die durch eine Beziehung der Form (2) mit F_k verknüpft ist, wenn wir für jede einzeln wie oben Kausalität und lineare Abhängigkeit voraussetzen. Im allgemeinen werden wir Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Reaktionen annehmen müssen, so daß eine Kraft F_k auch eine Reaktion x_i ($i \neq k$) beeinflusst. Dann erhalten wir für die Berechnung der x_i ein System linearer Gleichungen

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} \kappa_{ik}(\tau) \cdot F_k(t-\tau) \cdot d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

Dieses können wir wieder in der Form (2) schreiben, wenn wir $x(t)$ als Vektor $(x_1(t), \dots, x_n(t))$, $F(t-\tau)$ als Vektor $(F_1(t-\tau), \dots, F_n(t-\tau))$ und $\kappa(\tau)$ als Koeffizienten-Matrix $(\kappa_{ik}(\tau))$ auffassen.

2. Fourier-Zerlegungen

Die zeit abhängigen Größen $x(t)$, $F(t)$, $\kappa(t)$ lassen sich durch Fourier-Analyse in Spektren zerlegen, die Größen \hat{x} bzw. \hat{F} bzw. $\hat{\kappa}$ enthalten, die von der Frequenz f (bzw. von $\omega = 2\pi \cdot f$) abhängen, nicht aber von der Zeit t . Die entsprechenden Fourier-Integrale laufen für eine Funktion $\varphi (= x, F, \kappa)$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} \cdot d\omega \quad (5)$$

Umgekehrt ist das (Fourier-transformierte) Spektrum $\hat{\varphi}(\omega)$ gegeben durch

$$\hat{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \cdot e^{i\omega t} dt \quad (6)$$

Hieraus erhält man also die entsprechenden Gleichungen mit $x(t)$ und $\hat{x}(\omega)$ bzw. $F(t)$ und $\hat{F}(\omega)$ bzw. $\kappa(t)$ und $\hat{\kappa}(\omega)$ durch Substitution ($\varphi = x$ bzw. F bzw. κ).

Aufgrund der Kausalität kann man als untere Integrationsgrenze in (6) für $\varphi = \kappa$ statt $-\infty$ den Wert 0 setzen, da für $\tau < 0$ hier $\kappa(\tau) = 0$:

$$\hat{\kappa}(\omega) = \int_0^{\infty} \kappa(\tau) e^{i\omega\tau} \cdot d\tau \quad (7)$$

Wir nehmen an, daß das Spektrum der Koeffizienten $\hat{\kappa}(\omega)$ nirgends einen Pol hat, d.h. überall endlich ist. Im Falle von Impedanz-Spektren würden solche Pole z.B. beim Vorliegen ungedämpfter Schwingkreise auftreten, die ja ohnehin nicht ^{exakt} realisierbar sind, da sie stets (durch Widerstände) gedämpft sind.

Setzen wir in Gleichung (6) für $\varphi = x$ statt $x(t)$ den Ausdruck in (2) und dort für $\kappa(\tau)$ und für $F(t-\tau)$ die entsprechenden Ausdrücke auf der rechten Seite von (7) ein, so zeigt sich, daß die drei Spektren gemäß

$$\hat{x}(\omega) = \hat{\kappa}(\omega) \cdot \hat{F}(\omega) \quad (8)$$

verknüpft sind.

3. Ableitung der Kramers-Kronig-Beziehung [1, 2, 3, 5]

Die Funktion $\hat{\kappa}(\omega)$ ist komplex, wenn zwischen der Kraft $\hat{F}(\omega)$ und der Reaktion $\hat{x}(\omega)$ eine Phasenverschiebung auftritt. Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$\hat{\kappa}(\omega) = \text{Re}\hat{\kappa}(\omega) + i\text{Im}\hat{\kappa}(\omega)$$

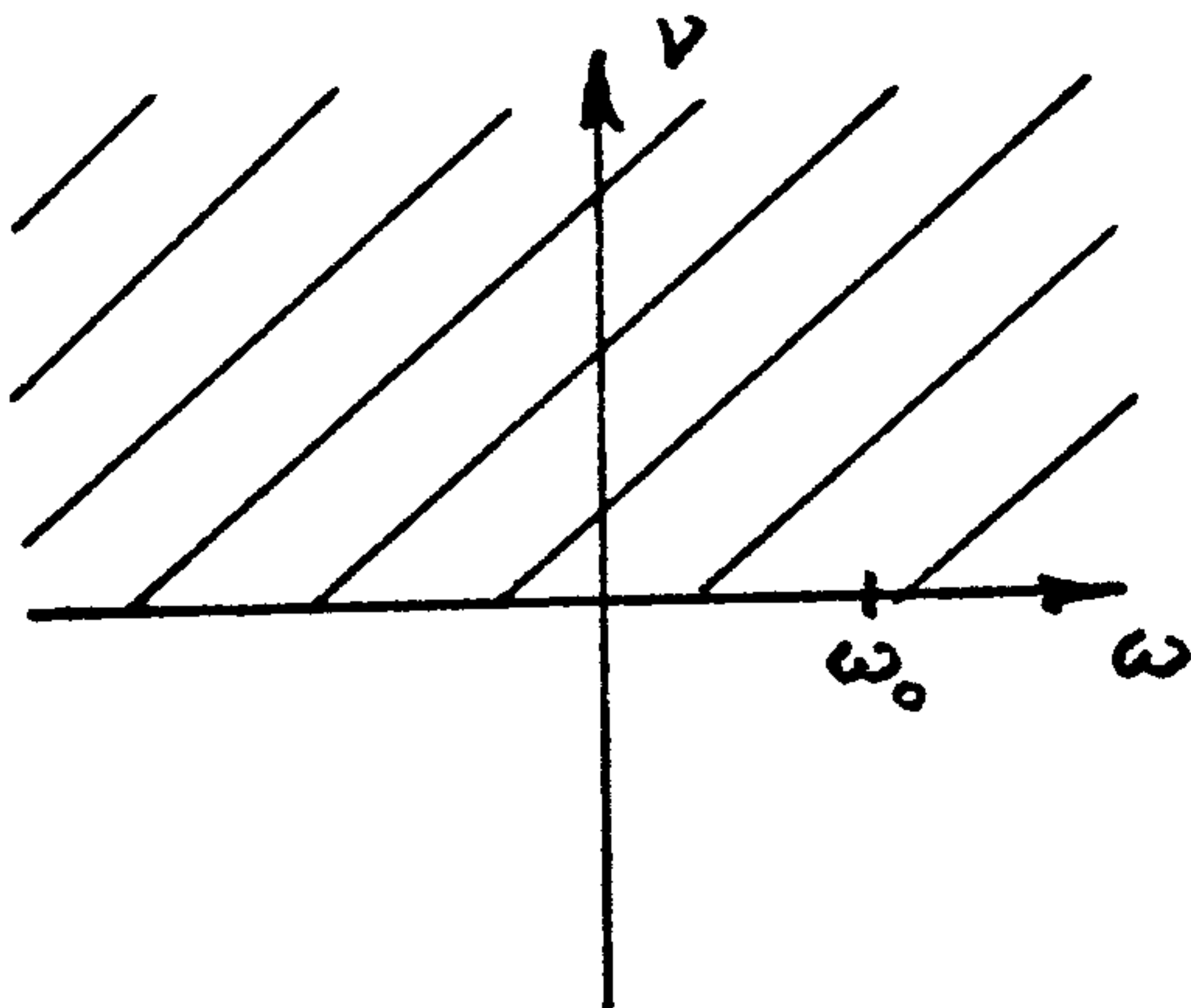
liefert zwei reelle Funktionen. Die Frage, ob es nötig ist, beide zu bestimmen, wird durch die Kramers-Kronig-Beziehung verneint. Vielmehr ist es möglich, aus der Kenntnis der einen (allerdings im gesamten unendlichen Frequenzband von $-\infty$ bis $+\infty$) den Wert der anderen an einer beliebigen Stelle $\omega = \omega_0$ zu berechnen [1, 2, 3, 6].

Bei der Ableitung der Kramers-Kronig-Beziehung zieht man die Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen heran und erweitert vorübergehend den Definitionsbereich der komplexen Funktion $\hat{\kappa}(\omega)$ auf einen ^{solchen} Teil der komplexen Zahlenebene (mit $w = \omega + i\nu$), wo $\hat{\kappa}(w)$ keine Pole hat, indem man das Argument ω einfach durch w substituiert. Für reelle Argumente ($\nu = 0$) behält sie ihre ursprünglichen Werte bei.

Das Integral (7) geht dabei über in

$$\hat{\kappa}(\omega) = \int_0^{\infty} \kappa(\tau) \cdot e^{i\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} \kappa(\tau) \cdot e^{i\omega\tau} \cdot e^{-\nu\tau} \cdot d\tau \quad (9)$$

Für positive Werte von ν , also in der oberen komplexen Halbebene (Abb. 2), hat das Integral dann überall endliche Werte, da $e^{-\nu\tau} < 1$ für $\tau > 1$. Mit $\nu \rightarrow \infty$ geht $\hat{\kappa}(\omega) \rightarrow 0$. $\hat{\kappa}(\omega)$ hat also in der ganzen oberen Hälfte der komplexen Ebene keinen Pol, wohl aber in der unteren Hälfte. Wir beschränken uns daher auf die Betrachtung der oberen Halbebene (mit $\nu = 0$).



Greifen wir nun einen beliebigen Wert ω_0 der Kreisfrequenz heraus (Abb. 2) und betrachten die Funktion

$$f(\omega) = \frac{\kappa(\omega)}{\omega - \omega_0} \quad (10)$$

die an der Stelle $\omega = \omega_0$ einen Pol hat.

Abb. 2: Die komplexe Zahlenebene.

In der schraffierten oberen Halbebene hat $\hat{\kappa}(\omega)$ keinen Pol, ist also überall endlich.

Nach den Theorien von Cauchy verschwindet das Integral einer Funktion über einen geschlossenen Weg auf der komplexen Zahlenebene, wenn in der von diesem Weg umschlossenen Fläche einschließlich ihres Randes kein Pol auftritt (vgl. z.B. [4]):

$$\oint f(\omega) d\omega = 0 \quad (11)$$

Als geschlossenen Integrationsweg wählen wir die reelle Achse, da dort $\kappa(\omega)$ physikalisch sinnvoll ist, und zwar von $\omega = -\infty$ bis $\omega = \omega_0 - \Delta\omega$ und von $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ bis $\omega = +\infty$. Dazwischen integrieren wir längs des oberen Halbkreises (HK) um ω_0 mit Radius $\Delta\omega$, da in ω_0 selbst ein Pol auftritt. Geschlossen wird der Weg durch den unendlichen Halbkreis mit $|\omega| = \infty$.

Da

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \kappa(\omega) = 0$$

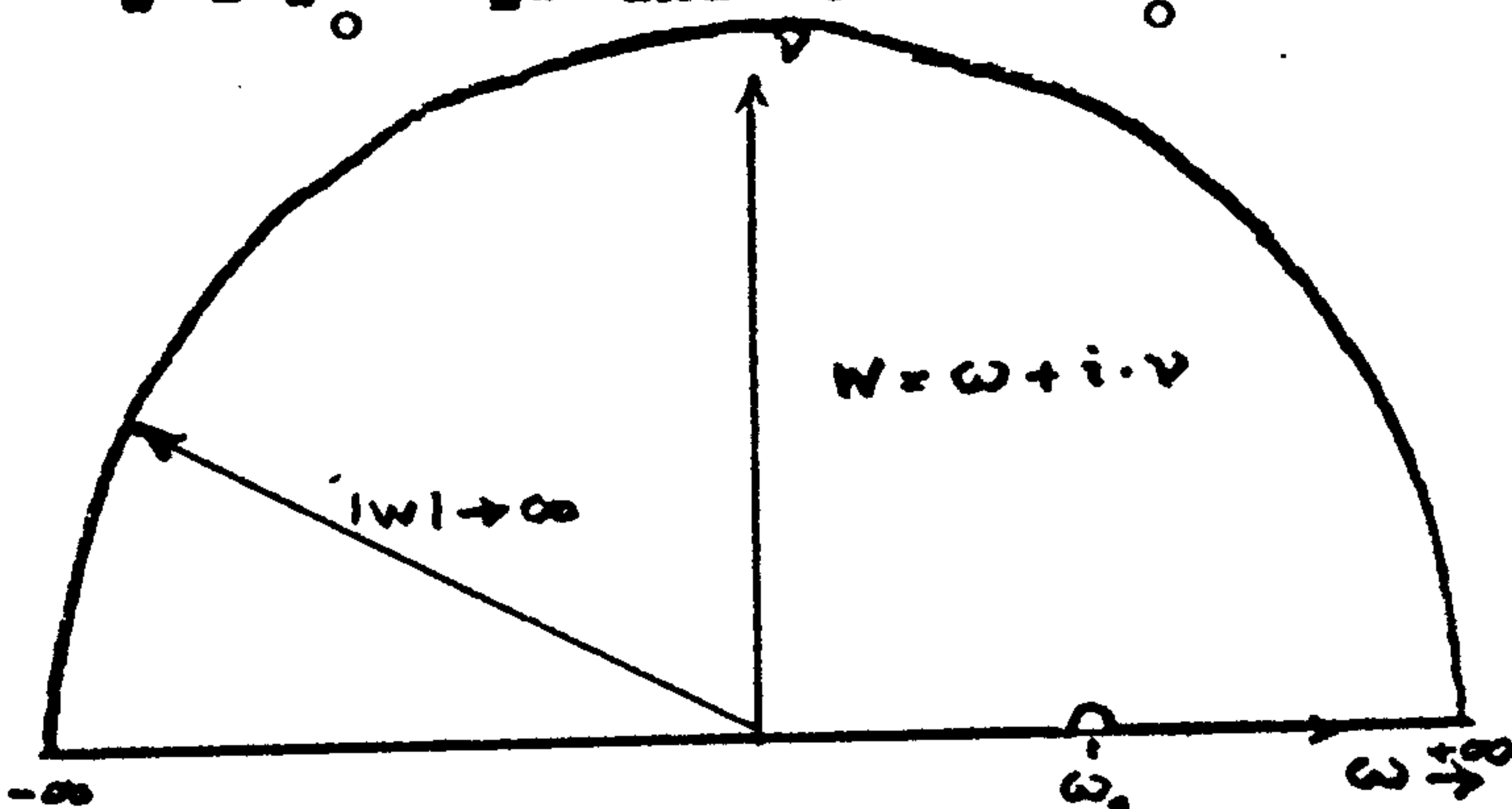


Abb. 3: Integrationsweg in (12)

erhalten wir nach (11) für die Funktion (10)

$$\int_{-\infty}^{\omega_0 - \Delta\omega} \frac{\hat{\kappa}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega + \int_{\omega_0 + \Delta\omega}^{\infty} \frac{\hat{\kappa}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega + \int_{\text{HK}} \frac{\hat{\kappa}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = 0 \quad (12)$$

Der Grenzwert für $\Delta\omega \rightarrow 0$ des Integrals über den Halbkreis um ω_0 ergibt sich zu

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \int_{\text{HK}} \frac{\hat{\kappa}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = -i\pi\hat{\kappa}(\omega_0) \quad (13)$$

Die beiden ersten Integrale in (12) ergeben zusammen für $\Delta\omega \rightarrow 0$ den sogenannten Hauptwert^{*)} von $-\infty$ bis $+\infty$:

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\omega_0 - \Delta\omega} \frac{\hat{\kappa}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega + \int_{\omega_0 + \Delta\omega}^{\infty} \frac{\hat{\kappa}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\kappa}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega$$

Es treten jetzt wiederum nur noch reelle Werte ω des Argumentes auf, und wir erhalten, wenn wir

$$\hat{\kappa}(\omega) = \text{Re}\hat{\kappa}(\omega) + i\text{Im}\hat{\kappa}(\omega)$$

in einen Realteil und einen Imaginärteil zerlegen

$$\hat{\kappa}(\omega_0) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re}\hat{\kappa}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im}\hat{\kappa}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \quad (14)$$

Da beide Integrale reell sind, führt die Zerlegung dieser Gleichung in einen Real- und Imaginärteil zu den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{Re}\hat{\kappa}(\omega_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}\hat{\kappa}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \\ \text{Im}\hat{\kappa}(\omega_0) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}\hat{\kappa}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \end{aligned} \quad (15)$$

Diese nennt man Kramers-Kronig-Beziehungen oder auch "Dispersionsbeziehungen" wegen ihrer Anwendbarkeit auf den komplexen Brechungsindex bzw. die komplexe Dielektrizitätskonstante (4). Diese Beziehungen

^{*)} Wird durch den Querstrich im Integralzeichen ausgedrückt.

sind aber, wie sich aus Abschnitt 1 ergibt, sehr viel allgemeiner verwendbar [5]. Hier interessiert die Anwendung auf komplexe Impedanzen [6]. Die hier skizzierte Ableitung geht auf Kramers und de Kronig (1927) [1] zurück; sie ist außerdem von anderen Autoren [2, 3, 5] im wesentlichen nachvollzogen worden.

Man kann die Beziehungen (14) und (15) auch anders formulieren [3], und zwar so, daß nur ^{über} positive, d.h. physikalisch sinnvolle Kreisfrequenzen integriert wird. Hierzu vergleichen wir $\hat{\kappa}(-\omega)$ aufgrund von (7): $\hat{\kappa}(\omega)$ mit

$$\hat{\kappa}(\omega) = \int_0^{\infty} \kappa(\tau) \cdot e^{i\omega\tau} \cdot d\tau$$

$$\hat{\kappa}(-\omega) = \int_0^{\infty} \kappa(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} \cdot d\tau$$

Aufgrund der Moivre-Beziehung

$$e^{i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) + i \cdot \sin(\omega\tau)$$

$$e^{-i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - i \cdot \sin(\omega\tau)$$

gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \hat{\kappa}(\omega) &= \operatorname{Re} \hat{\kappa}(-\omega) = \int_0^{\infty} \hat{\kappa}(\tau) \cdot \cos(\omega\tau) d\tau \\ \operatorname{Im} \hat{\kappa}(\omega) &= -\operatorname{Im} \hat{\kappa}(-\omega) = \int_0^{\infty} \hat{\kappa}(\tau) \cdot \sin(\omega\tau) d\tau \end{aligned} \quad (16)$$

und somit

$$\hat{\kappa}(\omega) = \hat{\kappa}(-\omega)^* \quad (* \text{ konjugiert komplex})$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \hat{\kappa}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega &= \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \hat{\kappa}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega - \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \hat{\kappa}(-\omega)}{-\omega - \omega_0} d(-\omega) = \\ &= \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \hat{\kappa}(\omega) \cdot \left(\frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega + \omega_0} \right) d\omega = 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{\omega \cdot \operatorname{Re} \hat{\kappa}(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \hat{\kappa}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega &= \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \hat{\kappa}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega - \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \hat{\kappa}(-\omega)}{-\omega - \omega_0} d(-\omega) = \\ &= \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \hat{\kappa}(\omega) \cdot \left(\frac{1}{\omega - \omega_0} + \frac{1}{\omega + \omega_0} \right) d\omega = 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{\omega \operatorname{Im} \hat{\kappa}(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \end{aligned}$$

Wir erhalten hiermit als oft bequemere Form der Kramers-Kronig-Beziehungen (14):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \hat{\kappa}(\omega_0) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \operatorname{Im} \hat{\kappa}(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \\ \operatorname{Im} \hat{\kappa}(\omega_0) &= -\frac{2\omega_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \hat{\kappa}(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \end{aligned} \quad (17)$$

4. Anwendungsbeispiele auf Impedanz-Spektren

Wir teilen die Impedanz Z in Real- und Imaginärteil auf:

$$Z(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$$

Beispiel 1: Gegeben sei der Imaginärteil

$$X(\omega) = X \cdot \omega^\alpha \quad (-1 \leq \alpha \leq 1) \quad (18)$$

Der Realteil ist dann nach (17) an der Stelle $\omega = \omega_0$ gegeben durch

$$R(\omega_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \cdot X(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega = \frac{2X}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^{\alpha+1} d\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Durch Substitution $y = \omega/\omega_0$ können wir erreichen, daß der Hauptwert des Integrals von ω_0 unabhängig wird. Da $\omega^\alpha = y^\alpha \cdot \omega_0^\alpha$, $\omega^2 = y^2 \cdot \omega_0^2$ und $d\omega = \omega_0 dy$ erhalten wir

$$R(\omega_0) = \frac{2X}{\pi} \cdot \omega_0^\alpha \cdot \int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha+1} dy}{y^2 - 1} = \frac{2}{\pi} X C \cdot \omega_0^\alpha$$

Die Form der Abhängigkeit des Realteils von ω ist also dieselbe wie die des Imaginärteils. Die Konstante C ist der Hauptwert, den wir berechnen müssen.

In Formelsammlungen [8] findet man

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{r-1}}{x^s - 1} dx = -\frac{\pi}{s} \cdot \cot\left(\pi \cdot \frac{r}{s}\right) \quad r \leq s - 1 \text{ ganzzahlig} \quad (19)$$

Auf diese Form kann man das untersuchte Integral dadurch bringen, daß man zunächst α durch die rationale Zahl m/n annähert, was mit beliebiger Genauigkeit möglich ist - m und n wählen wir teilerfremd ("kürzen"!)

$$\frac{m}{n} = \alpha \quad (20)$$

und die neue Variable

$$y = x^n \quad (21)$$

eingeführt. Es ist dann $dy = nx^{n-1}dx$, $y^2 \approx x^{2n}$ und $y^{\alpha+1} = x^{m+n}$, also

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha+1} dy}{y^2-1} = \int_0^{\infty} \frac{x^{m+n} \cdot n \cdot x^{n-1} dx}{x^{2n}-1} = n \cdot \int_0^{\infty} \frac{x^{m+2n-1} dx}{x^{2n}-1}$$

Verglichen mit (19) ist also $r = m + 2 \cdot n$ und $s = 2n$. Wir erhalten somit nach (19) und (20)

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha+1} dy}{y^2-1} = -\frac{\pi}{2} \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{m}{n} + \pi\right) = -\frac{\pi}{2} \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2} \cdot \alpha\right) \quad (21)$$

Der Realteil ist also

$$R(\omega) = -X(\omega) \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2} \cdot \alpha\right)$$

Den Phasenwinkel φ erhalten wir aus

$$\tan(-\varphi) = -\tan\varphi = \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$

also im vorliegenden Fall

$$\tan\varphi = 1/\cot\left(\frac{\pi}{2} \cdot \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \alpha\right)$$

zu

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \alpha \quad (23)$$

Spezialfälle:

- | | | |
|----------------------------|---|---|
| a) $\alpha = 1$ | $X(\omega) = L \cdot \omega$
$\cot\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
$R(\omega) = 0$ | <u>Induktivität</u>

$\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ |
| b) $\alpha = -1$ | $X(\omega) = -1/(C \cdot \omega)$
$\cot\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$
$R(\omega) = 0$ | <u>Kapazität</u>

$\varphi = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$ |
| c) $\alpha = -\frac{1}{2}$ | $X(\omega) = -X/\sqrt{\omega}$
$\cot\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$
$R(\omega) = -X(\omega)$ | <u>Warburg-Impedanz</u>

$\varphi = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$ |

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \alpha &= 0 & X(\omega) &= \text{const} \\
 & & \cot\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) &= \cot 0 = \infty \\
 & & R(\omega)/X(\omega) &= \infty & \psi &= 0 \\
 & & \text{Es ist also } X &= 0 \text{ und} \\
 & & R(\omega) &= \text{const} = R & & \underline{\text{Widerstand}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \alpha &= \frac{1}{2} & X(\omega) &= X \cdot \sqrt{\omega} \\
 & & \cot\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) &= \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\
 & & R(\omega) &= X(\omega) & \psi &= \frac{\pi}{4} = 45^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \alpha &= -1 + \epsilon & X(\omega) &= -1/(C' \cdot \omega^{1-\epsilon}) \\
 & & \cot\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) &= \cot\left(-\frac{\pi}{2} + \epsilon \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \epsilon\right) \\
 & & R(\omega) &= -X(\omega) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \epsilon\right)
 \end{aligned}$$

Beispiel 2: Falls sich der gegebene Imaginärteil einer Impedanz als Summe von zwei (oder mehr) Gliedern $X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots$ darstellen läßt, ergibt sich nach (15) bzw. (17) auch für den Realteil eine solche Summe $R(\omega) = R_1(\omega) + R_2(\omega) + \dots$, wobei man R_i auch einzeln aus X_i berechnen kann. Entsprechendes gilt für den Imaginärteil bei gegebenem Realteil. Z kann man dann als Serienschaltung der Z_i auffassen:

$$Z(\omega) = Z_1(\omega) + Z_2(\omega) + \dots$$

Nun läßt sich aber der behandelte Formalismus ebenso wie auf Impedanzen auch auf (komplexe) reziproke Impedanzen anwenden. Dann gilt das oben gesagte auch für entsprechende Summen

$$1/Z(\omega) = 1/Z_1(\omega) + 1/Z_2(\omega) + \dots$$

die man als Parallelschaltung der Z_1, Z_2, \dots auffassen kann.

Literatur

1. R.L. de Kronig, J. opt. Soc. Am. 12 (1926) 547
H.A. Kramers, Physiol. Zool., 30 (1929) 522
2. S.R. de Groot, P. Mazur
"Non-equilibrium Thermodynamics", Amsterdam 1961
3. S.R. de Groot, P. Mazur (übersetzt von H. und W. Staude),
"Grundlage der Thermodynamik irreversibler Prozesse"
Mannheim 1969 (BI-Taschenbuch 162/162a), S. 140-145
4. L. Bieberbach, "Einführung in die Funktionentheorie",
Bielefeld 1952, S. 73 - 83
5. H. Franke,
Lexikon der Physik, Band 1
Stuttgart 1969, S. 285 - 187
6. L.D. Landau, E.M. Lifschitz (übersetzt von G. Weber)
Lehrbuch der theoretischen Physik Band VIII,
Elektrodynamik der Kontinua,
Berlin 1967, §62, S. 302 - 306
7. R.L. Meirhaege, E.C. Dutoit, F. Cardon und W.P. Gomes,
"On the Applikation of the Kramers-Kronig-Relation to
Problems Concerning the Frequency Dependence of Electrode
Impedances"
Electrochim. Acta 21 (1976) 39 - 43
8. Der große Rechenruden, Band I,
Mannheim 1969, S. 154 (5) im Anhang